



# Amélioration du filtrage non linéaire dans les modèles d'état par ré-estimation de l'état passé

Thierry Chonavel

## ► To cite this version:

Thierry Chonavel. Amélioration du filtrage non linéaire dans les modèles d'état par ré-estimation de l'état passé. 23e éd. du colloque GRETSI, Sep 2011, Bordeaux, France. hal-00725203

**HAL Id: hal-00725203**

**<https://hal.science/hal-00725203>**

Submitted on 24 Aug 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Amélioration du filtrage non linéaire dans les modèles d'état par ré-estimation de l'état passé

Thierry CHONAVEL<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Institut Télécom; Télécom Bretagne, Lab-STICC UMR CNRS 3192  
Technopôle Brest-Iroise, CS 83818, 29238 Brest Cedex 3, France

<sup>2</sup>Université européenne de Bretagne  
thierry.chonavel@telecom-bretagne.eu

**Résumé** – Cet article propose une amélioration du comportement des techniques de filtrage dans les modèles d'état non linéaires. Pour cela, on introduit des techniques de filtrage de type Kalman étendu, "sans parfum" ou particulière qui exploitent en particulier la concaténation des équations d'état et d'observation afin de limiter les effets des non linéarités dans la propagation de l'état et d'améliorer l'estimation de l'état à l'instant antérieur. On vérifie que les performances obtenues par ces nouveaux algorithmes améliorent souvent les algorithmes de filtrage classiques correspondants.

**Abstract** – In this paper, we propose improvements of nonlinear filtering techniques. To this end, we consider extended, uncensored and particle based approaches that account for concatenation of state and observation equations to limit the effect of non-linearities approximations in state propagation and enable improved state vector estimate at the previous instant. We check that obtained performances often improve the results of filtering with these techniques, compared to the classical filtering counterparts.

## 1 Introduction

Dans cet article, on considère un modèle d'état non linéaire, décrit avec les notations classiques suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{f}_{t+1}(\mathbf{x}_t, \mathbf{v}_{t+1}) & \text{équation d'état} \\ \mathbf{y}_t = \mathbf{h}_t(\mathbf{x}_t, \mathbf{n}_t) & \text{équation d'observation} \end{cases} \quad (1)$$

Historiquement, dans le cas linéaire décrit par Kalman [8] et dans les travaux ultérieurs, que les modèles soient ou non linéaires et/ou gaussiens, il est d'usage de décomposer le problème du filtrage en deux étapes successives : une étape de prédiction et une étape de filtrage, mettant ainsi en œuvre l'équation d'état puis l'équation d'observation. Ce schéma se retrouve en particulier dans le filtrage de Kalman étendu (EKF), le filtrage de Kalman sans parfum (UKF) [6], ou dans des mises en œuvre du filtrage particulière [3].

Afin d'améliorer l'estimation de l'état, la technique la plus efficace consiste à éaliser un lissage. Le lissage peut être envisagé au moyen de techniques récentes performantes [4, 2]. Cependant, pour certaines applications les contraintes de temps-réel peuvent imposer une estimation immédiate de l'état à l'instant courant et donc de mettre en œuvre un filtrage de l'état. Afin d'améliorer le filtrage, diverses techniques ont été considérées afin d'intégrer la connaissance de l'observation dans l'étape de prédiction. C'est le cas notamment avec les versions particulières de l'EKF ou de l'UKF [9] ou des techniques itératives inspirées de l'algorithme de Kalman étendu itéré [1, 5].

Dans cet article, nous mettons en évidence l'intérêt qu'il peut y avoir à ré-estimer la valeur de l'état passé au vu de l'observation courante. En effet, à différence du cas linéaire, et du fait des approximations mises en jeux dans les traitements non linéaires, la ré-estimation de l'état courant artir d'un état passé lissé conduira à un état actuel filtré différent de celui qui aurait été obtenu par l'itération classique de la prédiction et du filtrage, même lorsque le prédicteur intègre la connaissance de l'observation.

On commencera ici par proposer des formules de filtrage dans les modèles d'état non linéaires, basées respectivement sur l'approximation de Taylor au premier ordre et sur la transformation sans parfum des fonctions du modèle, et qui mettent en jeu une ré-estimation de l'état à l'instant précédent. Dans cette approche, nous procédons simultanément à l'estimation du bruit d'état à l'instant courant. Ces algorithmes qui combinent l'estimation de l'état avec la ré-estimation de l'état précédent sont nommés respectivement CEKF (EKF Combiné) et CUKF (UKF Combiné). Ils sont présentés dans les paragraphes 2 et 3. Nous avons également développé des versions particulières de ces filtres combinés, conduisant aux filtres CPEKF et CUPF qui sont les pendants des filtres PEKF et UPF [9], versions particulières de l'EKF et de l'UKF, qui seront présentées au paragraphe 4.

Dans le paragraphe 5, on présente le comportement de ces filtres sur quelques exemples pour lesquels on montre qu'ils peuvent améliorer les performances des filtres classiques correspondants.

## 2 Filtre CEKF

Notons  $\mathbf{k}_t$  la combinaison des fonctions  $\mathbf{f}_t$  et  $\mathbf{h}_t$  :

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{h}_t(\mathbf{f}_t(\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{v}_t), \mathbf{n}_t) = \mathbf{k}_t(\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{v}_t, \mathbf{n}_t), \quad (2)$$

et  $\hat{p}$  l'approximation gaussienne de la loi de probabilité  $p$ . Pour évaluer  $\hat{p}(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:t}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_t; \mathbf{x}_{t|t}, \mathbf{P}_{t|t})$ , la loi approchée de l'état sachant  $\mathbf{y}_{1:t} = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_t\}$ , on commence par évaluer un estimateur lissé  $\mathbf{x}_{t-1|t}$  de  $\mathbf{x}_{t-1}$  ainsi qu'une version filtrée  $\mathbf{v}_{t|t}$  du bruit d'état au moyen de l'approximation

$$\hat{p}(\mathbf{x}_{t-1}^a | \mathbf{y}_{1:t}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_{t-1}^a; \mathbf{x}_{t-1|t}^a, \mathbf{P}_{t-1|t}^a) \quad (3)$$

de  $p(\mathbf{x}_{t-1}^a | \mathbf{y}_{1:t})$ , où  $\mathbf{x}_{t-1}^a = [\mathbf{x}_{t-1}^T, \mathbf{v}_t^T]^T$  représente un état augmenté. Notons

$$\mathbf{k}_{\mathbf{x},t} = \frac{\partial \mathbf{k}_t}{\partial \mathbf{x}}, \quad \mathbf{k}_{\mathbf{v},t} = \frac{\partial \mathbf{k}_t}{\partial \mathbf{v}}, \quad \mathbf{k}_{\mathbf{n},t} = \frac{\partial \mathbf{k}_t}{\partial \mathbf{n}}, \quad \mathbf{h}_{\mathbf{n},t} = \frac{\partial \mathbf{h}_t}{\partial \mathbf{n}}. \quad (4)$$

On suppose que  $\mathbf{x}_{t-1} \sim \mathcal{N}(\mathbf{x}_{t-1|t-1}, \mathbf{P}_{t-1|t-1})$ ,  $\mathbf{v}_t \sim \mathcal{N}(\bar{\mathbf{v}}_t, \mathbf{Q}_t)$  et  $\mathbf{n}_t \sim \mathcal{N}(\bar{\mathbf{n}}_t, \mathbf{R}_t)$  et on note

$$\mathbf{y}_{t|t-1} = \mathbf{k}_t(\mathbf{x}_{t-1|t-1}, \bar{\mathbf{v}}_t, \bar{\mathbf{n}}_t), \quad (5)$$

la valeur prédite de  $\mathbf{y}_t$  calculée à partir de l'état filtré à l'instant  $t-1$ . Le développement de Taylor au premier ordre de l'équation (5) donne alors

$$\mathbf{y}_t \approx \mathbf{y}_{t|t-1} + \mathbf{k}_{\mathbf{x},t}(\mathbf{x}_{t-1} - \mathbf{x}_{t-1|t-1}) + \mathbf{k}_{\mathbf{v},t}(\mathbf{v}_t - \bar{\mathbf{v}}_t) + \mathbf{k}_{\mathbf{n},t}(\mathbf{n}_t - \bar{\mathbf{n}}_t) \quad (6)$$

et en notant

$$\delta \bar{\mathbf{y}}_{t|t-1} = \mathbf{y}_{t|t-1} - \mathbf{k}_{\mathbf{x},t}\mathbf{x}_{t-1|t-1} - \mathbf{k}_{\mathbf{v},t}\bar{\mathbf{v}}_t - \mathbf{k}_{\mathbf{n},t}\bar{\mathbf{n}}_t, \quad (7)$$

on obtient la relation

$$\begin{aligned} \hat{p}(\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{v}_t | \mathbf{y}_{1:t}) &\propto \hat{p}(\mathbf{y}_t | \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{v}_t) \hat{p}(\mathbf{x}_{t-1}) \hat{p}(\mathbf{v}_t) \\ &\propto \exp \left( -\frac{1}{2} \left\| \mathbf{y}_t - \delta \bar{\mathbf{y}}_{t|t-1} - \mathbf{k}_{\mathbf{x},t}\mathbf{x}_{t-1} - \mathbf{k}_{\mathbf{v},t}\mathbf{v}_t \right\|_{(\mathbf{h}_{\mathbf{n},t}\mathbf{R}_t\mathbf{h}_{\mathbf{n},t}^T)^{-1}}^2 \right. \\ &\quad \left. -\frac{1}{2} \left\| \mathbf{x}_{t-1} - \mathbf{x}_{t-1|t-1} \right\|_{\mathbf{P}_{t-1|t-1}^{-1}}^2 -\frac{1}{2} \left\| \mathbf{v}_t - \bar{\mathbf{v}}_t \right\|_{\mathbf{Q}_t^{-1}}^2 \right) \end{aligned} \quad (8)$$

où  $\|\cdot\|_{\mathbf{M}}$  représente la norme induite par la matrice définie positive  $\mathbf{M}$ . On note par l'exposant  $^{(\mathbf{xv})}$  le vecteur d'état augmenté

$$\mathbf{x}^{(\mathbf{xv})} = [\mathbf{x}_{t-1}^T, \mathbf{v}_t^T]^T \quad (9)$$

et pour la loi  $\hat{p}(\mathbf{x}_{t-1}^{(\mathbf{xv})} | \mathbf{y}_{1:t}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_{t-1}^{(\mathbf{xv})}; \mathbf{x}_{t-1|t}^{(\mathbf{xv})}, \mathbf{P}_{t-1|t}^{(\mathbf{xv})})$  l'identification de la moyenne et de la covariance s'obtient en identifiant les termes correspondants de l'équation (8). Ainsi, on obtient l'inverse de  $\mathbf{P}_{t-1|t}^{(\mathbf{xv})}$  sous la forme d'une matrice bloc,  $\mathbf{P}_{t-1|t}^{(\mathbf{xv})} = ([\mathbf{B}]_{ij})^{-1}$ , avec  $i, j \in \{1, 2\}$ , et l'état lissé  $\mathbf{x}_{t-1|t}^{(\mathbf{xv})}$  au moyen de calculs usuels de régression linéaire :

$$[\mathbf{B}]_{11} = \mathbf{k}_{\mathbf{x},t}^T (\mathbf{h}_{\mathbf{n},t} \mathbf{R}_t \mathbf{h}_{\mathbf{n},t}^T)^{-1} \mathbf{k}_{\mathbf{x},t} + \mathbf{P}_{t-1|t-1}^{-1}$$

$$[\mathbf{B}]_{12} = [\mathbf{B}]_{21} = \mathbf{k}_{\mathbf{x},t}^T (\mathbf{h}_{\mathbf{n},t} \mathbf{R}_t \mathbf{h}_{\mathbf{n},t}^T)^{-1} \mathbf{k}_{\mathbf{v},t}$$

$$[\mathbf{B}]_{22} = \mathbf{k}_{\mathbf{v},t}^T (\mathbf{h}_{\mathbf{n},t} \mathbf{R}_t \mathbf{h}_{\mathbf{n},t}^T)^{-1} \mathbf{k}_{\mathbf{v},t} + \mathbf{Q}_t^{-1}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{t-1|t}^{(\mathbf{xv})} &= \mathbf{P}_{t-1|t}^{(\mathbf{xv})} \\ &\times \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{\mathbf{x},t}^T (\mathbf{h}_{\mathbf{n},t} \mathbf{R}_t \mathbf{h}_{\mathbf{n},t}^T)^{-1} (\mathbf{y}_t - \mathbf{y}_{t|t-1} - \mathbf{k}_{\mathbf{x},t}\mathbf{x}_{t-1|t-1}) \\ + \mathbf{P}_{t-1|t-1}^{-1} \mathbf{x}_{t-1|t-1} \\ \mathbf{k}_{\mathbf{v},t}^T (\mathbf{h}_{\mathbf{n},t} \mathbf{R}_t \mathbf{h}_{\mathbf{n},t}^T)^{-1} (\mathbf{y}_t - \mathbf{y}_{t|t-1} - \mathbf{k}_{\mathbf{x},t}\mathbf{x}_{t-1|t-1}) \\ + \mathbf{Q}_t^{-1} \bar{\mathbf{v}}_t \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (10)$$

Finalement, les paramètres filtrés de l'approximation gaussienne de l'état sont donnés par et

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{t|t} &= \mathbf{f}_t(\mathbf{x}_{t-1|t}, \mathbf{v}_{t|t}) \\ \mathbf{P}_{t|t} &= [\mathbf{f}_{\mathbf{x},t} \quad \mathbf{f}_{\mathbf{v},t}] \mathbf{P}_{t-1|t}^{(\mathbf{xv})} [\mathbf{f}_{\mathbf{x},t} \quad \mathbf{f}_{\mathbf{v},t}]^T. \end{aligned} \quad (11)$$

Finalement, l'algorithme CKEF s'écrit :

1. initialization :  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{0|0}$ ,  $\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_{0|0}$
2. itérations : pour  $t \geq 1$ ,
  - lissage : calculer  $\mathbf{P}_{t-1|t}^{(\mathbf{xv})}$  et  $\mathbf{x}_{t-1|t}^{(\mathbf{xv})} = [\mathbf{x}_{t-1|t}^T, \mathbf{v}_{t|t}^T]^T$  à partir des équations (10)
  - filtrage : calculer  $\mathbf{x}_{t|t}$  et  $\mathbf{P}_{t|t}$  à partir des équations (11).

## 3 Filtre CUKF

À la différence du développement de Taylor, la transformation sans parfum [6] procède en appliquant de façon exacte la transformation non linéaire considérée à un ensemble de points test ( $\sigma$ -points) et s'est rapidement imposée comme une alternative performante au filtre de Kalman étendu. Comme dans le filtre UKF, on propose d'appliquer la transformation sans parfum à l'état augmenté  $\mathbf{x}_{t-1}^{(\mathbf{xvn})} = (\mathbf{x}_{t-1}^T, \mathbf{v}_t^T, \mathbf{n}_t^T)^T$  pour calculer les paramètres de  $\hat{p}(\mathbf{x}_{t|t-1}, \mathbf{y}_{t|t-1})$ . Mais on l'applique ici plus particulièrement à la fonction  $\mathbf{k}_t(\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{v}_t, \mathbf{n}_t)$  pour calculer  $\hat{p}(\mathbf{x}_{t-1|t}, \mathbf{v}_{t|t})$ , dont on déduit ensuite  $\hat{p}(\mathbf{x}_{t|t})$ . En utilisant les notations standards de la transformation sans parfum [7] et en notant  $\mathbf{Q}_t$  et  $\mathbf{R}_t$  les covariances respectives de  $\mathbf{v}_t$  et de  $\mathbf{n}_t$ , l'algorithme s'écrit alors comme suit :

1. initialisation : choisir  $\mathbf{x}_{0|0}$  et  $\mathbf{P}_{0|0}^{\mathbf{x}}$
2. itérations : pour  $t \geq 1$ ,

- définition des points test 'instant  $t - 1$

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{t-1|t-1}^{(\mathbf{xv})} &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{t-1|t-1} \\ \bar{\mathbf{v}}_t \\ \bar{\mathbf{n}}_t \end{bmatrix} \\ \mathbf{P}_{t-1|t-1}^{(\mathbf{xv})} &= \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{t-1|t-1}^{\mathbf{x}} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}_t & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{R}_t \end{bmatrix} \\ \mathcal{X}_{t-1|t-1}^{(\mathbf{xv})} &= [\mathbf{x}_{t-1|t-1}^{(\mathbf{xv})} | \mathbf{x}_{t-1|t-1}^{(\mathbf{xv})} \pm \sqrt{(n_a + \lambda) \mathbf{P}_{t-1|t-1}^{(\mathbf{xv})}}] \\ &= \begin{bmatrix} \mathcal{X}_{t-1|t-1}^{\mathbf{x}} \\ \mathcal{X}_{t-1|t-1}^{\mathbf{v}} \\ \mathcal{X}_{t-1|t-1}^{\mathbf{n}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{X}_{t-1|t-1}^{(\mathbf{xv})} \\ \mathcal{X}_{t-1|t-1}^{\mathbf{v}} \\ \mathcal{X}_{t-1|t-1}^{\mathbf{n}} \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (12)$$

- ré-estimation de l'état 'instant  $t - 1$  :

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}_{t|t-1} &= \mathbf{k}_t(\mathcal{X}_{t-1|t-1}^{\mathbf{x}}, \mathcal{X}_{t-1|t-1}^{\mathbf{v}}, \mathcal{X}_{t-1|t-1}^{\mathbf{n}}) \\ \mathbf{y}_{t|t-1} &= \sum_{i=1}^{2n_a+1} W_i^{(m)} \mathcal{Y}_{t|t-1,i} \\ \mathbf{P}_{t|t-1}^{\mathbf{y}} &= \sum_{i=1}^{2n_a+1} W_i^{(c)} (\mathcal{Y}_{t|t-1,i} - \mathbf{y}_{t|t-1}) \\ &\quad \times (\mathcal{Y}_{t|t-1,i} - \mathbf{y}_{t|t-1})^T \\ \mathbf{P}_{t|t-1}^{(\mathbf{xv})\mathbf{y}} &= \sum_{i=1}^{2n_a+1} W_i^{(c)} (\mathcal{X}_{t-1|t-1,i}^{(\mathbf{xv})} - \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{t-1|t-1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}) \\ &\quad \times (\mathcal{Y}_{t|t-1,i} - \mathbf{y}_{t|t-1})^T \\ \mathbf{x}_{t-1|t}^{(\mathbf{xv})} &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{t-1|t} \\ \mathbf{v}_{t|t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{t-1|t-1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \mathbf{P}_{t|t-1}^{(\mathbf{xv})\mathbf{y}} (\mathbf{P}_{t|t-1}^{\mathbf{y}})^{-1} [\mathbf{y}_t - \mathbf{y}_{t|t-1}] \\ \mathbf{P}_{t-1|t}^{(\mathbf{xv})} &= \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{t-1|t-1}^{\mathbf{x}} & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}_t \end{bmatrix} \\ &\quad - \mathbf{P}_{t|t-1}^{(\mathbf{xv})\mathbf{y}} (\mathbf{P}_{t|t-1}^{\mathbf{y}})^{-1} (\mathbf{P}_{t|t-1}^{(\mathbf{xv})\mathbf{y}})^T \\ \mathcal{X}_{t-1|t}^{(\mathbf{xv})} &= [\mathbf{x}_{t-1|t}^{(\mathbf{xv})} | \mathbf{x}_{t-1|t}^{(\mathbf{xv})} \pm \sqrt{(n_{(\mathbf{xv})} + \lambda) \mathbf{P}_{t-1|t}^{(\mathbf{xv})}}] \\ &= \begin{bmatrix} \mathcal{X}_{t-1|t}^{\mathbf{x}} \\ \mathcal{X}_{t-1|t}^{\mathbf{v}} \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (13)$$

- estimation des paramètres filtrés 'instant  $t$  :

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_{t|t}^{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}_t(\mathcal{X}_{t-1|t}^{\mathbf{x}}, \mathcal{X}_{t|t}^{\mathbf{v}}) \\ \mathbf{x}_{t|t} &= \sum_{i=1}^{2n_{(\mathbf{xv})}+1} W_i^{(m)} \mathcal{X}_{t|t,i} \\ \mathbf{P}_{t|t}^{\mathbf{x}} &= \sum_{i=1}^{2n_{(\mathbf{xv})}+1} W_i^{(c)} (\mathcal{X}_{t|t,i} - \mathbf{x}_{t|t}) \\ &\quad \times (\mathcal{X}_{t|t,i} - \mathbf{x}_{t|t})^T.\end{aligned}\quad (14)$$

## 4 Versions particulières

Il est possible de définir des versions particulières des filtres précédents. Il est parfois indiqué dans la littérature que la combinaison des filtres EKF ou UKF et du filtrage particulaire conduisent à des améliorations comparativement à l'emploi isolé d'une de ces

techniques. Des versions particulières des filtres EKF et UKF ont été proposées dans [9]. Elles consistent à rogager des réalisations des approximations gaussiennes obtenues par les filtres EKF et UKF dans les étapes de prédiction et de filtrage. De même, on pourra construire des versions particulières des filtres CEKF et CUKF que l'on notera CEPF CUPF. Pour cela, à l'instant  $t$ , on lisse comme pour le CEKF ou le CUKF la distribution de  $\mathbf{x}_{t-1}$  pour chacune des particules puis on exploite cette loi comme loi d'importance pour propager la particule vers l'instant  $t$ . On peut appliquer ce procédé pour obtenir une version CPF du filtre particulaire classique PF. Faute de place, nous ne détaillerons pas ici cette méthode qui conduit, dans notre implémentation, à des performances proches de celles du PF classique.

## 5 Exemples

On considère le modèle étudié dans les références [9, 5] et défini par

$$(I) \begin{cases} \mathbf{x}_{t+1} &= 1 + \sin(0.04\pi t) + 0.5\mathbf{x}_t + \mathbf{v}_{t+1} \\ \mathbf{y}_t &= \mathbb{1}_{t \leq 30}(0.2\mathbf{x}_t^2) + \mathbb{1}_{t > 30}(0.5\mathbf{x}_t) + \mathbf{n}_t \end{cases} \quad (15)$$

où  $\mathbf{v}_t \sim \mathcal{Ga}(3, 1/2)$ , la loi gamma étant définie ici par

$$p(x|\alpha, \beta) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x), \quad (16)$$

et  $\mathbf{n}_t \sim \mathcal{N}(0, 10^{-5})$ . On reprend ici les mêmes paramètres que dans [9, 5]. Le tableau 2 présente l'EQM (Erreur Quadratique Moyenne) estimée sur l'état filtré pour les filtres envisagés. Les variances  $\sigma_{\widehat{EQM}}^2$  de ces estimateurs  $\widehat{EQM}$  des EQM sont également fournies. On voit en particulier que le CUPF surpasse les autres filtres en termes d'EQM.

TAB. 1 – EQM des états filtrés pour le modèle (I)

Filtre	$\widehat{EQM}$	$\sigma_{\widehat{EQM}}^2$
EKF	0.0123	0.0005
CEKF	0.0116	0.0001
UKF	0.072	0.0002
CUKF	0.072	0.0002
PF	0.0092	0.0040
CPF	0.0097	0.0041
UPF	0.0101	0.0001
CUPF	0.0057	0.0000

Considérons maintenant le modèle suivant :

$$(II) \begin{cases} \mathbf{x}_{t+1} &= (\mathbf{x}_t + \cos(0.5t) + \mathbf{v}_t)^\alpha \\ \mathbf{y}_t &= (\mathbf{x}_t + \mathbf{n}_t)^{1/\alpha}. \end{cases} \quad (17)$$

Ce modèle peut décrire la compensation au niveau d'un dispositif d'observation d'une non linéarité introduite dans un système. On prendra  $\alpha = 1/2$ . Le tableau 2 donne les résultats

obtenus pour un signal de  $T = 100$  échantillons et pour les variances de bruit  $\sigma_v^2 = 1$  et  $\sigma_n^2 = 0.01$ . Les résultats sont donnés pour un nombre variable de particules ( $N = 10, 10^2, 10^3$ ). Selon la complexité, les résultats sont moyennés sur  $100 \cdot 10^4$  réalisations indépendantes. On y voit que le filtre CUPF offre des performances optimales parmi les techniques présentées et fournit une EQM sensiblement indépendante du nombre de particules proposées. Cette propriété se trouve être ici encore plus nettement marquée que pour le filtre UPF classique. On voit par ailleurs que le CEKF donne de bonnes performances alors que l'EKF ne fonctionne pas, et que le CUKF améliore le filtre UKF de façon significative. Le filtre CPF par contre conduit sensiblement aux mêmes performances que le filtre PF et comme lui reste sensible au nombre de particules choisi.

TAB. 2 – EQM des états filtrés pour le modèle (II)

Filtre	$\widehat{EQM}$	$\sigma_{\widehat{EQM}}^2$
EKF	6.3276	16.4383
CEKF	0.0142	0.0000
UKF	0.0716	0.0003
CUKF	0.0119	0.0003
PF (N=10,100,1000)	0.0667, 0.0106, 0.0092	0.0012, 0, 0
CPF	0.0754, 0.0112, 0.0092	0.0018, 0, 0
UPF	0.0177, 0.0111, 0.0101	0.0000, 0, 0
CUPF	0.0110, 0.0092, 0.0093	0.0000, 0, 0

FIG. 1 – Modèle (II) pour les différents filtres avec 10 particules.

## 6 Conclusion

On a introduit dans cet article des filtres non linéaires qui exploitent une ré-estimation de l'état instant précédent et qui sont les pendants des filtres EKF, UKF, PF et UPF. En particulier le filtre CUKF proposé s'avère particulièrement performant et peu sensible au nombre de particules employées.

## Références

- [1] S.A. Banani and M.A. Masnadi-Shirazi, A New Version of Unscented Kalman Filter, *Proc. of the World Academy of Science, Engineering and Technology (WASET)*, vol. 26, pp.192-197, 2007.
- [2] M. Briers, A. Doucet and S. Maskell, smoothing algorithms for state space models, *Annals Institute Statistical Mathematics*, vol. 62, no. 1, pp. 61-89, 2010.

- [3] A. Doucet, N. de Freitas and N. Gordon, *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*, Springer Verlag, 2001.
- [4] S.J. Godsill, A. Doucet and M. West, Monte Carlo smoothing for nonlinear time series, *Journal of the american statistical association*, 2004, vol.99, n.465, pp.156-168, Mars 2004.
- [5] W. Guo, C. Han and M. Lei, Improved unscented particle filter for nonlinear bayesian estimation, *IEEE 10th Int. Conf. on Information Fusion*, Quebec, 2007.
- [6] S.J. Julier, J. K. Uhlmann and H.F. Durrant-Whyte, A new approach for filtering nonlinear systems, *IEEE Proc. of the American Control Conference*, vol.3, pp. 1628-1632, 1995.
- [7] S.J. Julier, The scaled unscented transformation, *Proc. of the American Control Conference*, pp. 4555-4559, Nov. 2002.
- [8] R.E. Kalman, A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems, *Transactions of the ASME - Journal of Basic Engineering*, vol. 82, pp. 35-45, 1960.
- [9] R. Van Der Merwe, Arnaud Doucet, N. De Freitas and E. Wan, *The unscented particle filter*, Cambridge University Engineering Department, Technical report n. CUED/F-ENFING/TR380, [cslu.cse.ogi.edu/publications/ps/merwe00a.ps.gz](http://cslu.cse.ogi.edu/publications/ps/merwe00a.ps.gz), Aug. 2000.